绵中实验高 2022 级数学周清一（9 月 15 日）

姓名：___________班级：___________

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，只有一个选项是正确的.

1．命题 $p:\forall x>2$，$x^2-1>0$，则 $\neg p$ 是（　）

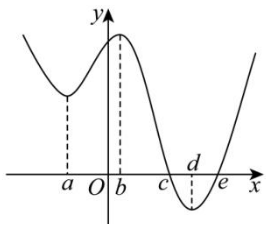
A．$\forall x>2$，$x^2-1\le 0$　　B．$\forall x\le 2$，$x^2-1>0$

C．$\exists x>2$，$x^2-1\le 0$　　D．$\exists x\le 2$，$x^2-1\le 0$

2．设集合 $A=\{-1,0,1\}$，集合 $B=\{0,1,2,3\}$，定义 $A*B=\{(x,y)\mid x\in A\cap B, y\in A\cup B\}$，则 $A*B$ 中元素个数是（　）

A．7　　B．10　　C．2^5　　D．5^2

3．已知定义在 R 上的函数 $f(x)$，其导函数 $f'(x)$ 的大致图像如图所示，则下列叙述正确的是（　）



① $f(b)>f(a)>f(c)$；

②函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取得极小值，在 $x=e$ 处取得极大值；

③函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取得极大值，在 $x=e$ 处取得极小值；

④函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(d)$.

A．③　　B．①②　　C．③④　　D．④

4．若 $a<b$ 且 $ab\ne 0$，则下列不等式中一定成立的是（　）

A．$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B．$\dfrac{b}{a}>1$　　C．$a^3<b^3$　　D．$|a|<|b|$

5．已知 $f\left(x\right)=x^{\alpha}$ 是幂函数，则“α 是正偶数”是“$f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[0,+\infty\right)$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知函数 $f(x)=\log_2\left(ax^2+2x+3\right)$，若对于任意实数 k，总存在实数 x_0，使得 $f\left(x_0\right)=k$ 成立，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$\left[-1,\dfrac{1}{3}\right)$　　B．$(-1,+\infty)$　　C．$\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　　D．$\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$

7．已知定义在 $\mathbf{R}$ 的函数满足 $f(x)=f(4-x)$，$f(x+2)+f(-x)=4$，则下列结论正确的是（　）

A．$f(x)$ 不是周期函数

B．$f(x)$ 是奇函数

C．对任意 $n\in\mathbf{Z}$，恒有 $f(4n+1)$ 为定值

D．对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(2n-1)=n$

8．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f'(x)-2f(x)>0$， $f(1012)=e^{2024}$，则不等式 $f\left(\frac{1}{2}\ln x\right)<x$ 的解集为（　）

A．$\left(e^{2024},+\infty\right)$　　　　B．$(0,2024)$

C．$(2024,+\infty)$　　　　D．$\left(0,e^{2024}\right)$

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9．已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$，若函数 $f(x)$ 在 $(2a,2a+3)$ 上存在最小值，则 a 的可能取值为（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．-1　　D．0

10．已知函数 $f(x)=\frac{|x|}{e^x}$.则下列说法正确的有（　）

A．函数 $y=f(x)$ 有两个零点

B．函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$

C．函数 $y=f(x)$ 有极大值 $\frac{1}{e}$

D．若关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有三个不同的根.则实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$

11．已知 x,y 为正实数，$x+y=2$，则（　）

A．xy 的最大值为 1　　　　B．$\frac{y}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值 3

C．$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+2}$ 的最小值为 $\frac{5}{6}$　　　　D．$(x^2+\frac{1}{5})(y^2+\frac{1}{5})$ 的最小值为 $\frac{21}{25}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，若 $f'(2)=3$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+3\Delta x)-f(2-\Delta x)}{\Delta x}=$______.

13．若曲线 $y=\ln(x+1)+x$ 在原点处的切线也是曲线 $y=e^x-2+a$ 的切线，则 $a=$__________.

14．对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，函数 $g(x)$ 满足 $g(x+y)=g(x)g(y)$.若 $f(2)=-1$，$g(3)=8$，则 $g(f(2024))=$______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（本小题 13 分）已知函数 $f\left(x\right)=x-x\ln x-a$．

(1)若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=bx+2$，求 a 和 b 的值；

(2)求 $f\left(x\right)$ 的单调区间与最大值.

16．（本小题 15 分）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $3S_n+a_n-1=0$.

（1）求 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）设 $\mathrm{b_n}=\log_{16}a_n$，求数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

17.（本小题 15 分）为践行"绿水青山，就是金山银山"，我省决定净化练江上游水域的水质. 省环保局于 2018 年年底在练江上游水域投入一些蒲草，这些蒲草在水中的蔓延速度越来越快，2019 年 2 月底测得蒲草覆盖面积为 $36\mathrm{m}^2$，2019 年 3 月底测得蒲草覆盖面积为 $48\mathrm{m}^2$，蒲草覆盖面积 y（单位：m^2）与月份 x（单位：月）的关系有两个函数模型 $y=ka^x(k>0,a>1)$ 与 $y=mx^2+n(m>0)$ 可供选择.

(1)分别求出两个函数模型的解析式；

(2)若 2018 年年底测得蒲草覆盖面积为 $20\mathrm{m}^2$，从上述两个函数模型中选择更合适的一个模型，试估算至少到哪一年的几月底蒲草覆盖面积能超过 $810\mathrm{m}^2$？（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）

18．（本小题 17 分）已知函数 $f\left(x\right)=x^{2}-\left(a+1\right)x+1\left(a\in\mathbf{R}\right)$

(1)若不等式 $f\left(x\right)<1-b$ 的解集为 $\left\{x\middle|-1<x<3\right\}$，求 a,b 的值；

(2)若对任意的 $x\in\left[2,4\right],f\left(x\right)+a+3\geq0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

(3)已知 $g\left(x\right)=mx+1-2m$，当 $a=1$ 时，若对任意的 $x_{1}\in\left[1,4\right]$，总存在 $x_{2}\in\left[1,4\right]$，使 $f\left(x_{1}\right)=g\left(x_{2}\right)$ 成立，求实数 m 的取值范围.

19．（本小题 17 分）已知函数 $f\left(x\right)=-2a\ln x-\dfrac{2}{x}$， $g\left(x\right)=ax-\left(2a+1\right)\ln x-\dfrac{2}{x}$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $f'\left(2\right)=0$，求实数 a 的值

(2)当 $a>0$ 时，求函数 $g\left(x\right)$ 的单调区间；

(3)若存在 $x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}^{2}\right]$ 使得不等式 $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

绵中实验高 2022 级数学周清一参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	C	B	A	C	A	D	C	D	AD	BCD	ABD

10.对于 A，令 $f\left(x\right)=0\Rightarrow x=0$，所以函数只有一个零点，故 A 错误；

对于 B，$f\left(x\right)=\frac{\left|x\right|}{\mathrm{e}^{x}}=\begin{cases}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}},x\geq 0\\ -\frac{x}{\mathrm{e}^{x}},x<0\end{cases}$，当 $x\geq 0$ 时，$f'\left(x\right)=\frac{\left(1-x\right)\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}}=\frac{1-x}{\mathrm{e}^{x}}$，

所以当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，
所以函数在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；

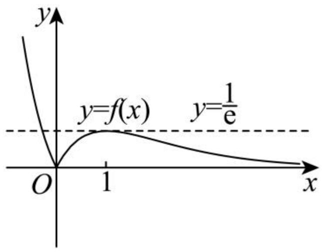
当 $x<0$ 时，$f'\left(x\right)=\frac{\left(x-1\right)\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}}=\frac{x-1}{\mathrm{e}^{x}}$，所以当 $x\in\left(-\infty,0\right)$ 时，$f'(x)<0$，

所以函数在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递减，故 B 正确；

对于 C，由 B 可知函数在 $x=1$ 处取得极大值为 $f\left(1\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$，故 C 正确；

对于 D，由 B 可知函数在 $x=0$ 处取得极小值 $f\left(0\right)=0$，由 C 可知

极大值为 $f\left(1\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$



又当 $x\to+\infty$ 时 $f\left(x\right)\to 0$，当 $x\to-\infty$ 时 $f\left(x\right)\to+\infty$，如图，

所以关于 x 的方程 $f\left(x\right)=a$ 有三个不同的根，则实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，故 D 正确；

故选：BCD.

三、**填空题：** 12．12　　13．2ln2　　14．2

四、解答题：

15.（1）$f'\left(x\right)=1-\left(\ln x+1\right)=-\ln x$，所以 $f'\left(1\right)=b=0$，切线方程为 $y=2$，

又 $f\left(1\right)=1-a$，所以 $1-a=2$，则 $a=-1$.

（2）$f\left(x\right)$ 的定义域为$(0,+\infty)$．$f'\left(x\right)=-\ln x$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left(0,1\right)$，单调递减区间为 $\left(1,+\infty\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 的最大值为 $f\left(1\right)=1-a$.

16．解：（1）由 $3S_1+a_1-1=0$，得 $a_1=\frac{1}{4}$．$3S_{n+1}+a_{n+1}-1=0$，两式相减得 $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$

所以数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{4}$为首项，$\frac{1}{4}$为公比的等比数列则$a_n=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$，

（2）因为$b_n=\log_{16}a_n=-\frac{n}{2}$，所以$\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}=\frac{4}{n(n+1)}=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

所以$T_n=4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{4n}{n+1}$

17．(1) $y=\frac{81}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{x}$，$y=\frac{12}{5}x^2+\frac{132}{5}$　　(2)2020 年 2 月

解：（1）若选择模型$y=ka^x(k>0,a>1)$，将$(2,36),(3,48)$分别代入得：$\begin{cases}ka^2=36\\ka^3=48\end{cases}$，

解得$a=\frac{4}{3}$，$k=\frac{81}{4}$，故函数模型为$y=\frac{81}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{x}$，

若选择模型$y=mx^2+n(m>0)$，将$(2,36),(3,48)$分别代入得：$\begin{cases}4m+n=36\\9m+n=48\end{cases}$，

解得$m=\frac{12}{5}$，$n=\frac{132}{5}$，故函数模型为$y=\frac{12}{5}x^2+\frac{132}{5}$.

（2）把$x=0$代入$y=\frac{81}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{x}$可得，$y=\frac{81}{4}=20.25$，

把$x=0$代入$y=\frac{12}{5}x^2+\frac{132}{5}$可得，$y=\frac{132}{5}=26.4$，$\because 20.25-20<26.4-20$，

$\therefore$选择函数模型$y=\frac{81}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{x}$更合适，

令$\frac{81}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{x}>810$，可得$\left(\frac{4}{3}\right)^{x}>40$，两边取对数可得，$x\lg\left(\frac{4}{3}\right)>\lg 40$，

$\therefore x>\frac{\lg 4+\lg 10}{\lg 4-\lg 3}=\frac{2\lg 2+1}{2\lg 2-\lg 3}\approx\frac{2\times 0.3+1}{2\times 0.3-0.48}\approx 13.3$，

故蒲草至少到 2020 年 2 月底覆盖面积能超过810m^2

18．(1)$\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$　　(2)$(-\infty,5]$　　(3)$m\geq 4$或$m\leq -8$.

解：（1）原不等式可化为$x^2-(a+1)x+b<0$，因为该不等式解集为$\{x|-1<x<3\}$，

可知 $x^2-(a+1)x+b=0$ 的两根为 -1 和 3，则 $\begin{cases}x_1+x_2=a+1\\x_1x_2=b\end{cases}$，即 $\begin{cases}2=a+1\\-3=b\end{cases}$，故解得 $\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$；

（2）若对任意的 $x\in[2,4], f(x)+a+3\geq 0$ 恒成立，

所以对任意的 $x\in[2,4]$，$a(x-1)\leq x^2-x+4$ 恒成立，

即对任意的 $x\in[2,4], a\leq\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$ 恒成立，所以 $a\leq x-1+\dfrac{4}{x-1}+1$，

又因为 $x-1>0$，$x-1+\dfrac{4}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{4}{x-1}}+1=5$，

当且仅当 $x-1=\dfrac{4}{x-1}$，即 $x=3$ 时取等号，所以 $a\leq 5$，所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,5]$；

（3）当 $a=1$ 时，$f(x)=(x-1)^2$，因为 $x\in[1,4]$，所以函数 $f(x)$ 的值域是 $[0,9]$，

因为对任意的 $x_1\in[1,4]$，总存在 $x_2\in[1,4]$，使 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，

所以 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 的值域的子集，

当 $m>0$ 时，$g(x)\in[1-m,2m+1]$，则 $\begin{cases}1-m\leq 0\\2m+1\geq 9\\m>0\end{cases}$，解得 $m\geq 4$，

当 $m<0$ 时，$g(x)\in[2m+1,1-m]$，则 $\begin{cases}2m+1\leq 0\\1-m\geq 9\\m<0\end{cases}$，解得 $m\leq -8$，

当 $m=0$ 时，$g(x)=1$，显然不成立，

综上所述，实数 m 的取值范围是 $m\geq 4$ 或 $m\leq -8$.

19．解：（1）因为 $f(x)=-2a\ln x-\dfrac{2}{x}$，则 $f'(x)=-\dfrac{2a}{x}+\dfrac{2}{x^2}$，

由 $f'(2)=0$ 可得 $-\dfrac{2a}{2}+\dfrac{2}{2^2}=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$.

（2）函数 $g(x)=ax-(2a+1)\ln x-\dfrac{2}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

且 $g'(x)=a-\dfrac{2a+1}{x}+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{ax^2-(2a+1)x+2}{x^2}=\dfrac{(ax-1)(x-2)}{x^2}$，

当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，可得 $x=\dfrac{1}{a}>0$ 或 $x=2$，

①当$\frac{1}{a}=2$，即$a=\frac{1}{2}$时，

对任意的$x>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$.

②当$0<\frac{1}{a}<2$，即$a>\frac{1}{2}$时，

$g'(x)>0$，得$0<x<\frac{1}{a}$或$x>2$，$g'(x)<0$，得$\frac{1}{a}<x<2$，

$g(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$和$(2,+\infty)$，单调递减区间为$\left(\frac{1}{a},2\right)$

③当$\frac{1}{a}>2$，即$0<a<\frac{1}{2}$时　$g'(x)>0$，得$0<x<2$或$\frac{1}{a}$；$g'(x)<0$，得$2<x<\frac{1}{a}$，

$g(x)$的单调递增区间为$(0,2)$和$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(2,\frac{1}{a}\right)$，

综上所述，$a=\frac{1}{2}$时，函数$g(x)$的单调增区间为$(0,+\infty)$；

$a>\frac{1}{2}$时，函数$g(x)$的单调增区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$和$(2,+\infty)$，单调减区间为$\left(\frac{1}{a},2\right)$；

$0<a<\frac{1}{2}$时，函数$g(x)$的单调增区间为$(0,2)$和$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，单调减区间为$\left(2,\frac{1}{a}\right)$.

（3）由$f(x)\le g(x)$，可得$ax-\ln x\ge 0$，即$a\ge\frac{\ln x}{x}$，其中$x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$，

令$h(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$，

若存在$x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$，不等式$f(x)\le g(x)$成立，则$a\ge h(x)_{\min}$，$x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$，

$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令$h'(x)=0$，得$x=e$，

当$\frac{1}{e}\le x<e$时，$h'(x)>0$，当$e<x\le e^2$时，$h'(x)<0$，

所以函数$h(x)$在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上递增，在$\left(e,e^2\right]$上递减，

所以函数$h(x)$在端点$x=\frac{1}{e}$或$x=e^2$处取得最小值.

因为$h\left(\frac{1}{e}\right)=-e$，$h\left(e^2\right)=\frac{2}{e^2}$，所以$h\left(\frac{1}{e}\right)<h(e)$，

所以$h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=-e$，所以$a\geqslant -e$，

因此，实数a的取值范围是$[-e,+\infty)$.